

On considère la série de fonctions

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \quad \text{où} \quad u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

a) Trouver le domaine de définition de  $u$ , et préciser certains intervalles où  $u(x)$  converge uniformément.

~~b) y a-t-il convergence uniforme de  $u(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ?~~

b) Donner un équivalent de  $u(x)$  quand  $x$  tend vers 0. On pourra comparer  $\sum e^{-n\sqrt{n}}$  à l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}} dt$ .

a) Si  $a > 0$  est fixé, pour  $x \geq a$  :

$$e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y aura donc convergence normale de  $u(x)$  pour  $x \geq a$ , donc uniforme sur  $[a, +\infty[$ . Ceci pour tout  $a > 0$ . Il sera donc définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Si  $x = 0$ ,  $u_n(x) = 1 \quad \forall n$  et  $\sum u_n$  diverge

Si  $x < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$  et  $\sum u_n$  diverge

~~b) Si il y avait convergence uniforme de  $\sum u_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on aurait~~

b) Si  $x > 0$  et  $t \in [n, n+1]$ , on a  $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{n}}$ , puis

$$u(x) - 1 \leq \int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}} dt \leq u(x)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-xs} ds = 2 \left( \left[ s \frac{e^{-xs}}{-x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-xs}}{-x} ds \right)$$

$$= \frac{2}{x} \int_0^{\infty} e^{-xs} ds = \frac{2}{x^2}$$

Seit  $\frac{2}{x^2} \leq u(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$

Conclusions:

$$u(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

Ma la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}_+$  mais n'est pas normalement convergente.

$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n}$  assure la divergence de  $\sum \left\| \frac{(-1)^n}{n+x} \right\|_\infty$ .

La "règle d'Abel uniforme" s'applique à la série alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$  puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+x} = 0$  uniformément pour  $x \in \mathbb{R}_+$  (en effet :  $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{1}{n+x} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ )

Donc  $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$  converge uniformément. (Van NB2)

CQFD

NB : preuve de la règle d'Abel Uniforme

Th :  $a_n, b_n$  fcts de  $E \rightarrow \mathbb{C}$ .

Si 1)  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  est uniformément bornée (ie  $\exists B \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n(x)| \leq B$ )

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$  uniformément pour  $x \in E$

3)  $(a_n(x))_n$  décroît pour tout  $x$  (ainsi  $a_n(x) \in \mathbb{R}_+$ )

Alors  $\sum a_n b_n$  est uniformément convergente sur  $E$ .

preuve : On utilise la transformation d'Abel

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

\*  $(a_N B_N)_N$  converge uniformément vers 0 puisque  $\forall x \in E \quad |a_N(x) B_N(x)| \leq B |a_N(x)|$

où  $a_N \rightarrow 0$  uniformément

\* Il reste à prouver que  $\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$  converge uniformément. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy Uniforme :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{E} \quad \left| \sum_{n=p}^q (a_n - a_{n+1}) B_n \right| &\leq B \sum_{n=p}^q (a_n(n) - a_{n+1}(n)) \\ &\leq B (a_p(n) - a_{q+1}(n)) \\ &\leq B a_p(n) \end{aligned}$$

et la convergence uniforme de  $a_p(n)$  vers 0 pour  $p \rightarrow +\infty$  montre que :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p \quad q \geq p > p \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{E}} \left| \sum_{n=p}^q (a_n - a_{n+1}) B_n \right| \leq \epsilon$$

Q.F.D.

NB 2) : Résoudre cet exercice sans utiliser la règle d'Abel Uniforme.  
On utilise la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

avec  $a_n = \frac{1}{n+x}$  et  $b_n = (-1)^n$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N b_n &= \frac{(-1)^N}{N+x} + \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right) (-1)^n \\ &= \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} \end{aligned}$$

converge uniformément vers 0 car

$$\left| \frac{(-1)^N}{N+x} \right| \leq \frac{1}{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Q.F.D.

converge uniformément canoniquement. En effet :

$$\sum_{n \in \mathbb{R}_+} \sup \frac{1}{(n+x)(n+1+x)} \leq \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

On définit la fonction  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ , où  $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

a) Trouver le domaine de définition de  $u$

b) Étudier sa continuité, sa dérivabilité. On pourra montrer que  $u$  n'est pas dérivable en 0 en utilisant le Théorème des Accrémentements Finis et la croissance de  $u'$ .

$$a) \quad x \geq 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \text{montre que } u(x)$$

converge ~~par~~ normalement pour  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Si  $x < 0$ , on aura pour  $y$  suffisamment grand :

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$  diverge, donc  $u(x)$  divergera aussi.

|| Ccl :  $u(x)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ , et par suite sera continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$b) \quad u_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } u'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}. \quad \text{Si } x \in [a, +\infty[,$$

où  $a > 0$  est fixé à l'avance,

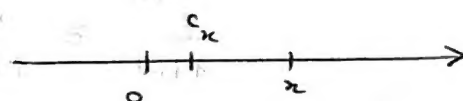
$$|u'_n(x)| \leq \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$$

Comme  $|e^{-na}| \leq \frac{1}{n}$  si  $n > N$ , on constate que  $\left| \frac{ne^{-na}}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2}$   
 puis la convergence normale de  $\sum u'_n(x)$  sur  $[a, +\infty[$ .

Th :  $\sum u_n(x)$  série de fonctions de  $I \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) ( $I$  int. de  $\mathbb{R}$ )  
 Si : -  $\sum u_n(x)$  cv simplement sur  $I$   
 -  $\sum u_n'(x)$  cv uniformément sur  $I$   
 Alors  $u_n(x) \doteq \sum u_n(x)$  est dérivable sur  $I$  et  $u'(x) = \sum u_n'(x)$

Ccl: G Th. mq  $u(x) = \sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$  est dérivable sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ , donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $u'(x) = \sum \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ .

\*  $u$  n'est pas dérivable en 0

$$\forall x > 0 \quad \exists c_x \in ]0, x[ \quad \frac{u(x) - u(0)}{x} = u'(c_x)$$


Comme  $u'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $u'(c_x) \leq u'(x)$  et :

$$\forall x > 0 \quad \frac{u(x) - u(0)}{x} \leq u'(x)$$

Supposons par l'absurde que  $u$  soit dérivable en 0. Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x) - u(0)}{x}$  existe. Notons-la  $l$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{u(x) - u(0)}{x} \leq u'(x) \leq \sum_{n=0}^N \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2} \leq -e^{-Nx} \sum_{n=0}^N \frac{n}{1+n^2}$$

montre que

$$l \leq - \sum_{n=0}^N \frac{n}{1+n^2}$$

en passant à la limite pour  $x$  tendant vers  $0_+$ . En faisant maintenant tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans cette inégalité :

$$l \leq -\infty$$

absurde.

CQFD

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique coïncidant avec la fonction  $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

a)  $f$  est-elle développable en série de Fourier pour toute valeur de  $x$ ?  
 Cette série converge-t-elle uniformément sur tout intervalle.

b) Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ . En déduire  $\alpha, \beta, \gamma$  de sorte que cette série se réduise à  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ . En déduire  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .

a) Soit  $f$   $2\pi$ -périodique et loc. intégrable. On sait que si  $f$  s'exprime comme la somme d'une série trigonométrique  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  et que cette série converge uniformément, alors :

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin px = \pi b_p \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos px = \pi a_p$$

$a_p$  et  $b_p$ , ainsi définies, s'appellent les "coefficients de Fourier trigonométriques" de  $f$ .

Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux. Le Th. de Dirichlet montre que la série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx \text{ converge simplement vers } \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , ie si  $f(\pi) = f(-\pi) \Leftrightarrow \alpha\pi^2 + \beta\pi + \gamma = \alpha\pi^2 - \beta\pi + \gamma \Leftrightarrow \beta = 0$ , la série de Fourier de  $f$  converge normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

(cf. Th. Dirichlet Ramis IV 3.5.4. 2°/6 I et 3°/Th)

b) Calculons  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \cos nx \, dx$  sin  $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sin nx \, dx$$

Comme :

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx = \left[ x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \sin nx = \frac{4\pi}{n^2}$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin nx = \left[ x \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx = -\frac{2\pi}{n}$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos nx = \left[ x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx = \left[ x^2 \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \cos nx = -\frac{4\pi^2}{n}$$

On trouve :  $\begin{cases} a_n = \frac{4\alpha}{n^2} \\ b_n = -\frac{4\pi}{n}\alpha - \frac{2}{n}\beta \end{cases}$

Ainsi :  $\begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2} \\ b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$  puis  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x \right) dx = -\frac{\pi^2}{3}$  si l'on choisit  $\gamma = 0$ .

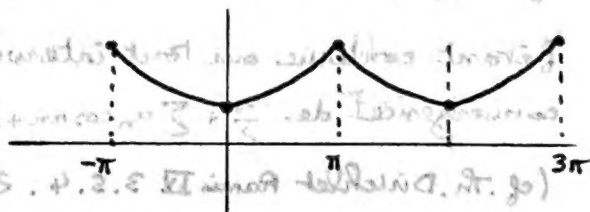
$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$  convergera donc simplement vers  $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x$  si  $x \in ]0, 2\pi[$ ,

ou vers  $\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = 0$  si  $x = 0$  (puisque  $f(0+) = 0$  et  $f(0-) = f(2\pi) = \frac{4\pi^2}{4} - \pi^2 = 0$ )

On en déduit pour  $x = 0$  :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

NB : On peut reprendre tout l'exercice avec  $f$  paire,  $2\pi$ -périodique et telle que  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  sur  $[0, \pi]$ .  $f$  sera alors continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$  convergera uniformément vers  $f$  sur tout intervalle compact  $[a, b]$ .



$f \in C^1$  par morceaux et continue

↓

La série de Fourier conv. unif. sur tout compact.

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} \, dx - \int_0^{\pi} \frac{\pi x}{2} \, dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4} = -\frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$